Concursul Experior Ediţia a VI-a

Baraj, 23.11.2013   Clasa a XI-a

Subiecte

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

(1p) a)Să se arate că $A^2 - I_3 = A^3 - A$.

(2p) b)Să se calculeze $A^3, n \in \mathbb{N}^*$.

(1p) c)Să se calculeze $\det(A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n)$.

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere rationale, a. î.

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{5}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

(2p) a) Să se determine a_n şi $b_n, n \in \mathbb{N}^*$.

(1p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

(2p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - 2b_n}{a_n - 2b_n}$.

Se acordă 1p din oficiu. Timp de lucru 1h.

Barem de corectare

Pb1.

a)Calcul direct sau se exprimă $A = B + I_3$, unde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $B^2 = O_3$	1p
b) $B^n = O_3, n \geq 2 \Longrightarrow A^n = (B + I_3) = C_n^0 I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + \cdots = I_3 + nB$ $A + A^1 + A^2 + \cdots + A^n = nI_3 + \frac{n(n+1)}{2}B$	1p 1p
c)det$=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} + n & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} \\ n(n+1) & n(n+1) + n & n(n+1) \\ -\frac{3n(n+1)}{2} & -\frac{3n(n+1)}{2} & -\frac{3n(n+1)}{2} + n \end{vmatrix} =$ $\frac{n^3}{4}\begin{vmatrix} n+3 & n+1 & n+1 \\ n+1 & n+2 & n+1 \\ -3n-3 & -3n-3 & -3n-1 \end{vmatrix} \xRightarrow[L_3+3L_1]{L_2-L_1} \frac{n^3}{4}\begin{vmatrix} n+3 & n+1 & n+1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = n^3$	1p

Pb2.

a) $\left(3+\sqrt{5}\right)^n = C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1}\sqrt{5} + C_n^2 3^{n-2}\sqrt{5}^2 + \ldots + C_n^n \sqrt{5}^n$ $\left(3-\sqrt{5}\right)^n = C_n^0 3^n - C_n^1 3^{n-1}\sqrt{5} + C_n^2 3^{n-2}\sqrt{5}^2 + \cdots + (-1)^n C_n^n \sqrt{5}^n$ $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ (prin adunarea și scăderea cele două dezvoltări) $a_n = \dfrac{\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n}{2}, \qquad b_n = \dfrac{\left(3+\sqrt{5}\right)^n - \left(3-\sqrt{5}\right)^n}{2\sqrt{5}}$	1p 1p
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n}{\left(3+\sqrt{5}\right)^n - \left(3-\sqrt{5}\right)^n}\sqrt{5} = \sqrt{5} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^n}{\left(3+\sqrt{5}\right)^n}}{1-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^n}{\left(3+\sqrt{5}\right)^n}} = \sqrt{5}$, pt că $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} < 1$	1p
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - 2b_n}{a_n - 2b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(\sqrt{5}-2\right)\left(3-\sqrt{5}\right)^n}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(\sqrt{5}+2\right)\left(3-\sqrt{5}\right)^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - 2b_n}{a_n - 2b_n} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} = 9 + 4\sqrt{5}.$	1p 1p